Résume complexe

Prof :Ben Rached.F

Forme algébrique

$z = a + ib$

$a = \mathcal{R}e(z)$ *partie réelle de z*

$b = Im(z)$ *partie imaginaire de z*

Conjugué

$\bar{z} = a - ib$

Propriétés du conjugue

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$\bar{z} = z$ équivaut à $z \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = -z$ équivaut à $z \in i\mathbb{R}$

$$z\bar{z} = (\mathcal{R}e(z))^2 + (Im(z))^2 = a^2 + b^2$$

(O, $\vec{U}, \vec{V}$) repère orthonormé direct

$Z_M = \mathrm{a} + \mathrm{ib}$ affixe du point $\mathrm{M(a, b)}$

M(z) image de z= a + ib

Affixe d'un vecteur :

$$Z_{\overrightarrow{MN}} = Z_N - Z_M$$

$Z_{\vec{U}} = Z_{\vec{V}}$ *si et seulement si* $\vec{U} = \vec{V}$

$\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}}$ réel *ssi* $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont colinaires

$\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}}$ imaginaire pur *ssi* $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont orthogonaux

Module

$$|z| = \sqrt{(\mathcal{R}e(z))^2 + (Im(z))^2}$$

Propriétés du module

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Argument

On appelle argument de z et on note arg(z) toute mesure de l'angle orienté $(\vec{U}, \overrightarrow{OM})$ avec $z = Z_M$

Pour tout nombre complexe non nul $z = \mathrm{a} + \mathrm{ib}$

$\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

$$coS(\theta) = \frac{\mathcal{R}e(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$Sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Forme trigonométrique

$(\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi]$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec $r = |z| > 0$

Propriétés d'argument

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$
$$\arg(\alpha z) \equiv \arg(z))[2\pi]\ pour\ tout\ réel\ \alpha > 0$$
$$\arg(\alpha z) \equiv \pi + \arg(z))[2\pi]\ pour\ tout\ réel\ \alpha < 0$$
$$\arg(z^n) \equiv n\ arg(z)[2\pi]$$

$*(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(Z_A)[2\pi]$

$*\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg(Z_B) - \arg(Z_A)\ [2\pi]$ $\equiv \arg(\frac{Z_B}{Z_A})\ [2\pi]$

$*(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(Z_B - Z_A)[2\pi]$

$*(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \equiv \arg(Z_C - Z_A) - \arg(Z_B - Z_A)[2\pi]$

$\equiv \arg(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A})\ [2\pi]$

Notation :

Pour tout réel θ,on pose

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et

on lit ≪exponentielle $i\theta$ ≫

Formules d'Euler

Pour tout réel θ

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et pour tout entier n

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Propriétés

Pour tout réel θ :

$*|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$

$*\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad *-e^{i\theta} = e^{i(\theta-\pi)}$

$*ie^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

Pour tout réel θ et pour tout entier k

$*\ e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$

Pour tous réels $\theta et \theta'$et pour tout entier n

$*\ e^{i(\theta)}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

$*\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

$*\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$*e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$

Forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ

On écrit $z = re^{i\theta}\ avec\ r = |z| > 0$

Cette écriture s'appelle forme exponentielle de z